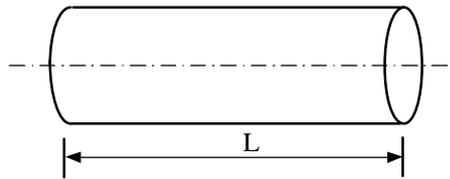


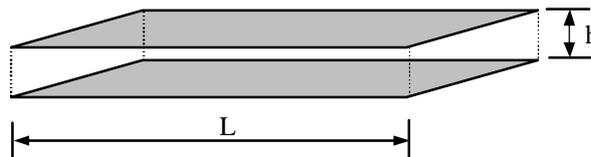
MECANICA DE FLUIDOS Y MAQUINAS FLUIDODINAMICAS

Guía Trabajos Prácticos N°6: Ecuaciones de Navier-Stokes

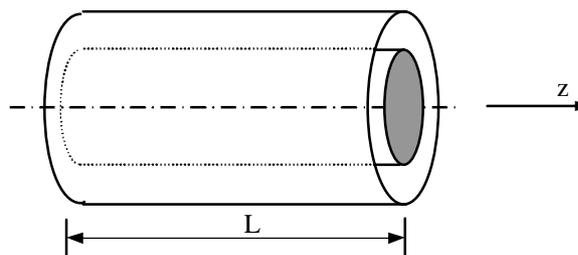
- 1.- *Flujo de Poiseuille.* Calcular, para un tubo circular de radio R , y longitud L , la caída de presión entre los dos extremos (p_1-p_2) en función del caudal Q . El flujo es laminar. El fluido es incompresible y tiene viscosidad conocida m . Encuentre el factor de fricción, $f(Re)$.



- 2.- *Flujo entre placas paralelas.* Calcular la caída de presión (p_1-p_2) para un flujo desarrollado entre dos placas paralelas situadas entre sí a una distancia h . El flujo es laminar. El fluido es incompresible y tiene viscosidad conocida m (Fig. 2). Dé $f(Re)$.



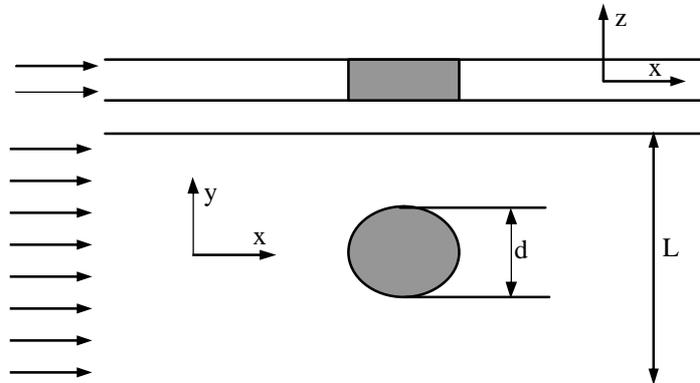
- 3.- *Flujo entre anillos.* En la figura se muestran dos cilindros concéntricos. Entre ellos pasa un caudal Q . Calcular la caída de presión por unidad de longitud, sabiendo que el radio interno es r y el radio externo R . El fluido es incompresible y tiene viscosidad m . Considere flujo laminar completamente desarrollado. La velocidad es normal a la sección que se muestra en la figura, es decir, $\underline{v} = (0, 0, v_z)$



- 4.- *Flujo entre cilindros rotantes.* Con una geometría similar al problema 3, pero con el fluido en reposo, el cilindro interior comienza a girar sobre su propio eje con velocidad angular ω mientras que el cilindro exterior permanece fijo. Cuando se llega a régimen estacionario la potencia entregada al cilindro interior es N . Calcule la viscosidad del fluido si el largo del cilindro es L .

5. Ej. Parcial. *El "aparato" de Hele-Shaw.*

Este dispositivo es usado para la visualización de flujos invíscidos, ya que el flujo de Hele-Shaw consiste en un flujo altamente viscoso entre placas paralelas. Esta paradoja se resuelve si uno considera que los efectos viscosos dominan la dirección transversal (z) mientras el flujo se mostrará como irrotacional en el plano de las placas (x - y).



Partiendo de las ecuaciones de N-S, realice las hipótesis necesarias (ej: flujo altamente viscoso, por lo que $a_x a_y = 0$) y

a) demuestre que

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad ; \quad v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

b) obtenga U_m, V_m , velocidades medias en el espesor h .

c) muestre que precisamente $(\nabla_x \bar{V})_z = 0$, siendo V la velocidad media. Esta es la condición de irrotacionalidad en el plano de las placas que nos permite usar este aparato como simulador de flujos planos ideales.

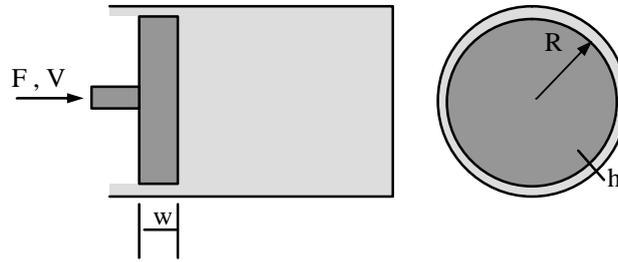
d) muestre que si el flujo es incompresible entonces

$$\text{div} \bar{V} = 0 \Rightarrow \nabla^2 p = 0$$

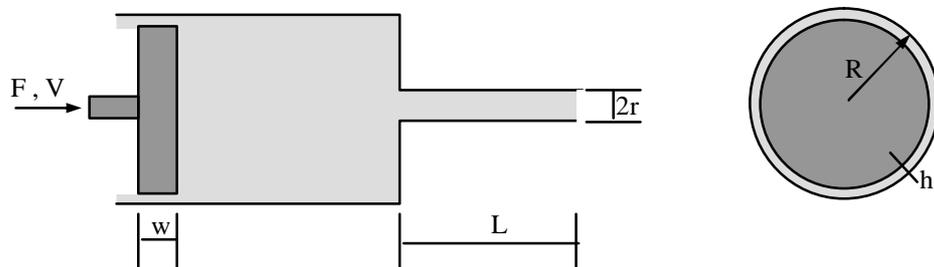
e) encuentre U_m, V_m para un obstáculo circular de radio R y $V_\infty = U_\infty \hat{i}$.

f) tome un descanso.

6. Halle la relación de amortiguación F/V para un pistón con las características de la figura, siendo el fluido que contiene el pistón aceite SAE 60.

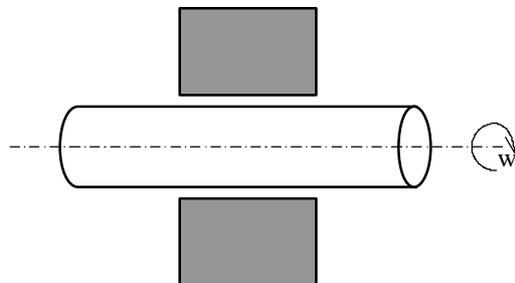


7. Calcule la relación F/V y la presión en el punto 1. El cilindro expulsa a la atmósfera.



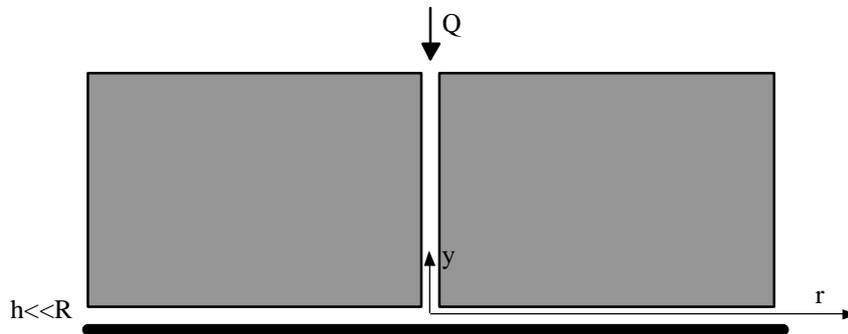
8. Agua a 25°C se usa como lubricante del eje de la hélice propulsora de un gran barco. El agua es bombeada a través del gap (h) entre el eje y el cojinete. Asumiendo flujo laminar y un diferencia de presiones de 1 kg/cm^2 entre ambos extremos del cojinete, calcule:

- El caudal de lubricación
- El campo de velocidades (realice las hipótesis que considere necesarias) .
 Datos: $h=0,1\text{cm}$, $R=30\text{cm}$, $w= 400\text{ rpm}$, y el ancho del cojinete= 120cm

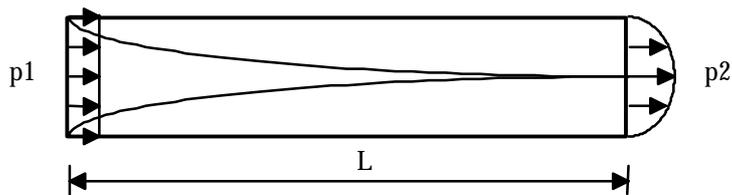


Propuestos

10. Obtenga $v_r(r,y)$ y $P(r)$ para el problema de la figura. haga las hipótesis que considere convenientes en las ecuaciones adimensionalizadas.

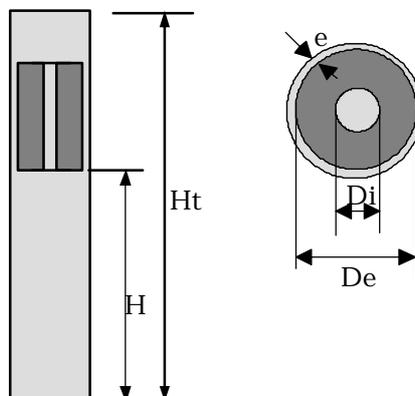


- 11) En la entrada de un fluido plano a un tubo de sección circular, el flujo laminar se va desarrollando y a una distancia L , el perfil resulta parabólico. Compare las pérdidas de presión entre este caso $[(p_2 - p_1)/L]$ y el de un flujo completamente desarrollado.



- 12) El cuerpo de peso W que se muestra en la figura cae en un medio fluido *muy viscoso* y tarda en recorrer la distancia H un tiempo T .

Datos: H, T, D_e, e, W, H_t .
Cuanto vale D_i ?



H ECUACIONES DIFERENCIALES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, θ, x) Y ESFÉRICAS (r', ϕ, θ')

Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0$$

Ecuación de continuidad en coordenadas esféricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{(r')^2} \frac{\partial}{\partial r'}[\rho (r')^2 V_{r'}] + \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'}(\rho V_\theta \sin \theta') + \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'}(\rho V_\phi) = 0$$

Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas para un fluido de viscosidad constante

Componente r

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} \right] \\ + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Componente θ

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right] \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right] \\ + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \end{aligned}$$

Componente x

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right] \\ = \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r'} + \frac{V_\theta}{r'} \frac{\partial V_r}{\partial \theta'} + \frac{V_\phi}{r' \sin \theta'} \frac{\partial V_r}{\partial \phi'} - \frac{V_\theta^2}{r'} + \frac{V_\phi^2}{r'} \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial r'} + \rho g_{r'} + \mu \left[\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial V_r}{\partial r'} \right) \right] \\ + \frac{1}{r'^2 \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sin \theta' \frac{\partial V_r}{\partial \theta'} \right) \\ + \frac{1}{r'^2 \sin^3 \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\sin^2 \theta' \frac{\partial V_r}{\partial \phi'} - \frac{2 V_\theta}{r'^2} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta'} \right) \\ - \frac{2 V_\phi \cos \theta'}{r'^2} - \frac{2}{r'^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi'} \end{aligned}$$

Componente θ'

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r'} + \frac{V_\theta}{r'} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} + \frac{V_\phi}{r' \sin \theta'} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi'} + \frac{V_r V_\theta}{r'} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right] \\ = -\frac{1}{r'} \frac{\partial p}{\partial \theta'} + \rho g_{\theta'} + \mu \left[\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial r'} \right) \right] \\ + \frac{1}{r'^2 \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sin \theta' \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right) \\ + \frac{1}{r'^2 \sin^3 \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\sin^2 \theta' \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi'} - \frac{2 V_\phi}{r'^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \right) \\ - \frac{2 \cos \theta'}{r'^2} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi'} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \end{aligned}$$

Componente ϕ'

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r'} + \frac{V_\theta}{r'} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta'} + \frac{V_\phi}{r' \sin \theta'} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi'} \right] \\ = -\frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial p}{\partial \phi'} + \rho g_{\phi'} + \mu \left[\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r'} \right) \right] \\ + \frac{1}{r'^2 \sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sin \theta' \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta'} \right) + \frac{1}{r'^2 \sin^3 \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'} \left(\sin^2 \theta' \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi'} - \frac{2 \cos \theta'}{r'^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi'} \right) \\ - \frac{2}{r'^2} \frac{\partial V_r}{\partial r'} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi'} + \frac{2}{r'^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta'} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi'} \end{aligned}$$

Ecuaciones de Euler

Se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes haciendo $\mu = 0$.