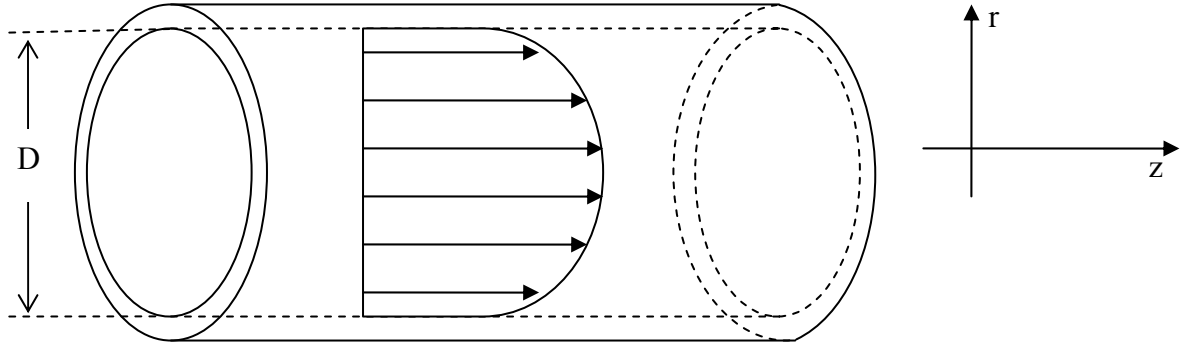


PERDIDAS DE CARGA EN CONDUCTOS DE SECCION CIRCULAR

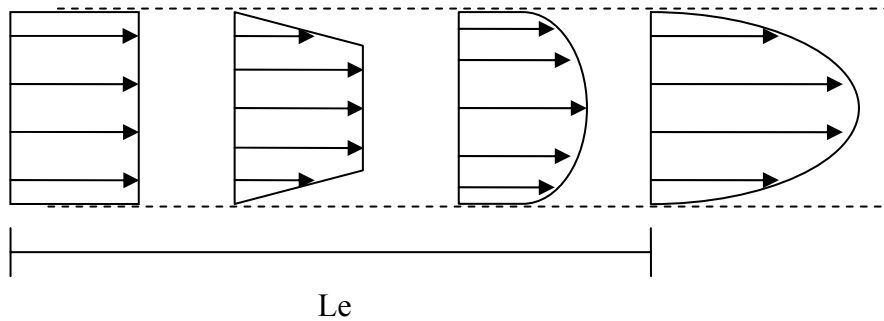


Partimos de las siguientes hipótesis:

- 1) Flujo Completamente Desarrollado (**F.C.D.**)

$$v_z = v(r) ; \quad v_\theta = v_r = 0$$

La velocidad solo depende de r . Hay una longitud de desarrollo a la entrada donde la teoría no es válida. Es la longitud en que los efectos viscosos se propagan desde la pared hacia el centro del flujo. Las capas próximas a la pared se frenan por efecto de adherencia y a su vez frenan a las capas más interiores.



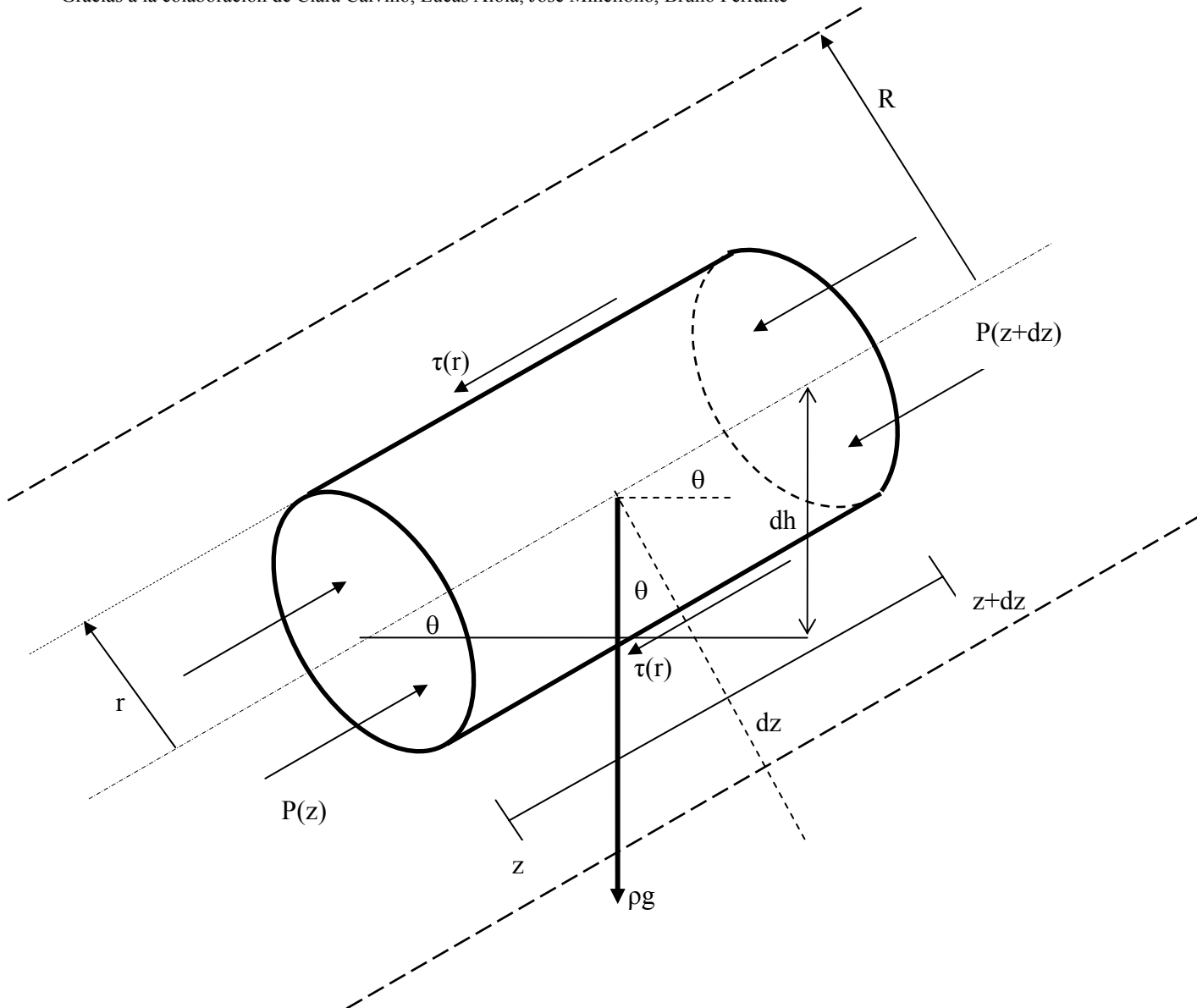
$$\frac{Le}{D} = 0,051 \cdot Re \quad Re = \frac{\rho \cdot \bar{V} \cdot D}{\mu} = \frac{\bar{V} \cdot D}{\nu} \quad \bar{V} = Q / A$$

- 2) Flujo laminar estacionario.
Flujo laminar: las líneas de corriente son suaves y bien definidas.
Flujo estacionario: No depende del tiempo.
- 3) Adherencia a la pared.

$$v_z(R) = 0 ; \quad R = D / 2$$

- 4) Sección constante, flujo incompresible y viscosidad constante.

$$D = cte ; \quad \rho = cte ; \quad \mu = cte$$



$$F.C.D. \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \rightarrow \sum F_z = 0$$

Asumiendo τ positivo, el signo se deriva de acuerdo con el perfil de velocidades

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial r} . \text{ Si } \frac{\partial v}{\partial r} < 0 \Rightarrow \tau < 0 .$$

Tener en cuenta la relación existente entre las variaciones de altura, la inclinación del tubo y la coordenada axial. Por simple geometría resulta: $dh = \sin \theta dz$; $\sin \theta = \frac{dh}{dz}$

$$P(z) \cdot \pi r^2 - (P(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz) \cdot \pi r^2 + \tau \cdot 2\pi r dz - \rho g \pi r^2 dz \sin \theta = 0$$

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial P}{\partial z} dz \pi r^2 - \rho g \pi r^2 dz \sin \theta + \tau \cdot 2\pi r dz &= 0 \\
 -\left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \frac{dh}{dz}\right) r + 2\tau &= 0 \\
 -\frac{\partial(P + \gamma h)}{\partial z} r + 2\tau &= 0 \quad ; \quad \gamma = \rho g \\
 \tau &= \frac{1}{2} \frac{\partial(P + \gamma h)}{\partial z} r
 \end{aligned}$$

Observar que este balance es válido para cualquier cilindro de radio r donde $0 < r \leq R$. Incluso se puede plantear sobre la lámina en contacto con la pared del caño, obteniéndose una relación para la tensión de corte en dicha zona de acuerdo con:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \frac{\partial(P + \gamma h)}{\partial z} R \quad (1)$$

Además, la anterior es válida no sólo para flujo estrictamente laminar, sino también para flujo turbulento, al menos en el sentido de los promedios temporales, ya que el flujo turbulento no se puede asumir estrictamente estacionario.

Retomando, definiendo $P_z = P + \gamma h$ como la Presión Piezométrica, las anteriores pueden ponerse como:

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Observar que la existencia de fricción provoca la caída (pérdida o disminución) de P_z . Vemos entonces cómo la presencia de esfuerzos viscosos provoca la pérdida de energía mecánica disponible para el flujo. De tal forma se concluye que el fluido circula por la conducción venciendo la fricción viscosa a expensas de la energía disponible, es decir, por intermedio del trabajo de la presión y la gravedad.

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{r}{2} \frac{\partial P_z}{\partial z} \\
 \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{r}{2} \frac{\partial P_z}{\partial z} \\
 \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{r}{2\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Integrando se obtiene,

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z} + a$$

Teniendo en cuenta la condición de adherencia a la pared resulta,

$$v_z(R) = \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z} + a = 0$$

Por lo tanto, el perfil de velocidades queda dado por

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z} (r^2 - R^2)$$

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

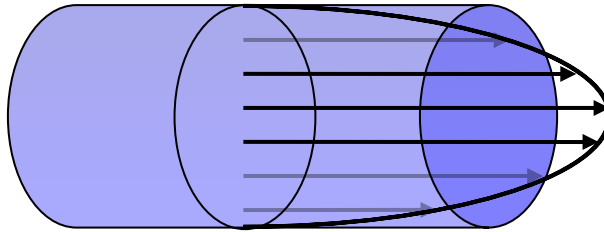
Observar que el perfil de velocidades es un paraboloide de revolución con un máximo en el centro de la sección.

$$V_{\max} = v_z(0) = \frac{-R^2}{4\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Como el valor medio de la velocidad V está dado por $Q = V \cdot A$ y $Q = \iint v_n dA$ se tiene

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_z(r) 2\pi r dr = \frac{V_{\max}}{2}$$

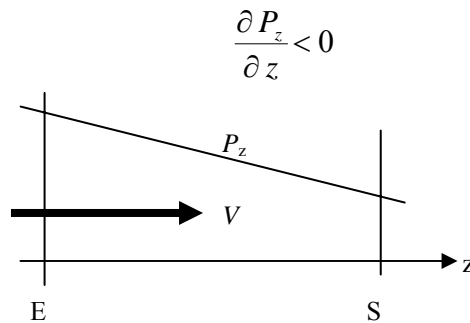
$$v_z(r) = 2V \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$



Así se llega a que para dicho perfil parabólico se cumple,

$$V = \frac{-R^2}{8\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

El signo está asociado a que, dado V en sentido positivo de z entonces P_z disminuye en la misma dirección,



$$Q = V \cdot A = \frac{-\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

$$|Q| = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left| \frac{\partial P_z}{\partial z} \right|$$

$$Q = \frac{-\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

$$V = \frac{-D^2}{32\mu} \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

Como el gradiente de P_z es constante como consecuencia de la hipótesis de F.C.D. (observar que en la anterior V es constante a lo largo de z), entonces resulta que P_z varía linealmente y por lo tanto son válidas las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{\Delta P_z}{L} = \frac{P_z^S - P_z^E}{L}$$

Siendo L la longitud del tramo de ducto considerado. Es así que puede escribirse,

$$V = \frac{-D^2}{32\mu} \frac{\Delta P_z}{L}$$

y consecuentemente,

$$\Delta P_z = -32\mu \frac{V}{D} \frac{L}{D}$$

Recordando la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{1}{2} \rho V_e^2 + \underbrace{\gamma h^E + P_z^E}_{P_z^E} = \gamma h_L + \frac{1}{2} \rho V_s^2 + \underbrace{\gamma h^S + P_z^S}_{P_z^S}$$

como el área es la misma y el flujo incompresible, se verifica que $V_E = V_S$ y, además como la energía cinética es constante a lo largo de un conducto de área uniforme en F.C.D. (dado que el perfil de velocidades no depende de z) resulta entonces que la pérdida en P_z resulta igual a la pérdida en la energía mecánica total o de Bernoulli. Dicho de manera contradictoria, resulta igual a la variación en la “constante” de Bernoulli, que obviamente en este caso deja de ser constante, y debe interpretarse como la energía mecánica específica disponible del flujo, $B = 1/2 \rho V^2 + P + \gamma h$. Reiterando, en esta situación la energía mecánica o de Bernoulli B no se conserva debido a los mecanismos de disipación asociados a los efectos viscosos. Arribamos así a la conclusión que lo que hemos calculado como caída en la Presión Piezométrica debido a la fricción es igual a las Pérdidas γh_L en la ecuación de conservación de la energía, ya que no hay variación de energía cinética porque el flujo es completamente desarrollado y estacionario y no hay elementos que realicen trabajo sobre el sistema. Resumiendo, las pérdidas igualan a la caída en la piezométrica, que a su vez resulta igual a la variación total de energía mecánica,

$$\Delta B = \Delta P_z = -\gamma h_L$$

Escribiremos entonces,

$$V = \frac{D^2}{32\mu} \frac{\gamma h_L}{L}$$

O alternativamente,

$$\gamma h_L = 32\mu \frac{V}{D} \frac{L}{D}$$

En general, cuando haya variaciones de área y por lo tanto variaciones de energía cinética, los efectos viscosos provocarán pérdidas que serán a expensas de todas las

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

componentes de la Energía de Bernoulli, es decir, de la cinética, de la potencial y de la presión.

En la expresión anterior es posible hacer aparecer la tensión de corte (fricción) en la pared del tubo τ_w (alternativamente puede hacerse uso de la (1)), veamos

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} = 8 \mu \frac{V}{D}$$

Y por lo tanto resulta,

$$\gamma h_L = 4 \tau_w \frac{L}{D}$$

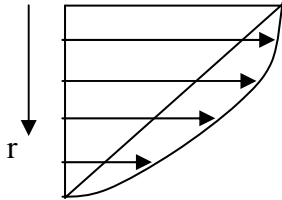
Esta expresión pone en evidencia el efecto de la fricción τ_w sobre las pérdidas y es además válida para flujo turbulento. Si introducimos el coeficiente adimensional

$f_r = \frac{4 \tau_w}{\frac{1}{2} \rho V^2}$, denominado *factor de fricción*, siendo éste una medida de la fuerza de fricción en relación a las fuerzas inerciales o energía cinética específica, arribamos a

$$\gamma h_L = f_r \frac{1}{2} \rho V^2 L/D$$

Esta es la celebrada fórmula de *Darcy-Weisbach* para el cálculo de las pérdidas de carga.

Observar que en el caso laminar τ_w es proporcional al valor secante del gradiente de velocidad.



$$\tau_w \approx \mu \Delta V / \Delta r = \mu V / R \approx \mu V / D$$

$$\tau_w = 8 \mu V / D$$

Midiendo la *Fricción Viscosa* en proporción a la energía cinética resulta:

$$\tau_w / (\frac{1}{2} \rho V^2) = 16 \mu / (\rho V D) = 16 / Re$$

por lo tanto, es inmediato observar

$$Re = \rho V D / \mu = 2 \frac{1}{2} \rho V^2 / (\mu V / D) \approx \frac{1}{2} \rho V^2 / \tau_{vis}$$

De lo cual se deduce obviamente que el número de Reynolds (Re) es un coeficiente adimensional que mide la magnitud de la energía cinética del fluido o fuerzas de inercia en relación a las fuerzas viscosas.

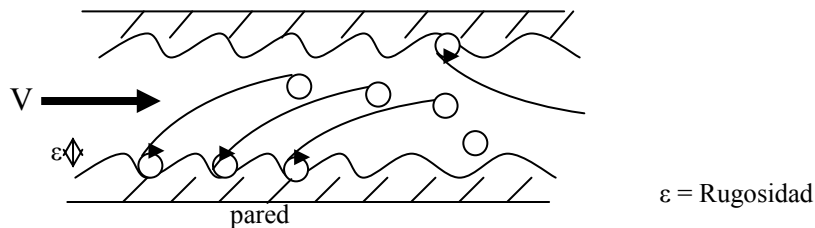
$$Re \approx F_{inercia} / F_{vis}$$

Para el caso **laminar** se deriva fácilmente la siguiente expresión para el *factor de fricción*:

$$f_r = 64 / Re$$

Turbulencia:

Nos ocuparemos en esta sección de introducir las relaciones necesarias para el cálculo de pérdidas en cañerías en caso de régimen turbulento. Si en un ensayo con un tubo y un dado fluido, se incrementa la velocidad media V , se estará incrementando el número de Re . De esta manera, dicho parámetro será la variable de control en estos ensayos. Se llegará así al punto crítico donde los vórtices atrapados en las rugosidades de la pared se desprenden y viajan varios diámetros por la corriente con una dinámica de interferencias que producen cascadas de vórtices de menor diámetro. El perfil de velocidades se ve entonces perturbando considerablemente, dejando de tener la forma parabólica del caso laminar para adquirir una forma mucho más aplanada que crece logarítmicamente desde la pared.



En la situación descrita por la figura, se observan innumerables pequeños torbellinos que tiene su principal origen en las rugosidades de la pared del tubo y que, a Re bajos, quedan atrapados y no alteran la solución obtenida para pared lisa. Es más, a dichos valores de Re , no participan significativamente en las pérdidas y el flujo es estable ya que los mecanismos disipativos viscosos son aún el efecto dominante. Alrededor de $Re=2300$, el desprendimiento de vórtices desde la pared empieza a ser considerable y el flujo se inestabiliza, alterándose completamente los patrones de movimiento y transformándose el mismo en un estado turbulento, con vórtices que interactúan entre ellos, siendo arrastrados por la corriente principal varios diámetros antes de extinguirse. Esto da como resultado líneas de corriente dependientes del tiempo y con una geometría muy imbricada, cuya longitud es varias veces mayor que la distancia entre los puntos que la misma une. En el caso de pared completamente lisa, pueden alcanzarse números de Re muchos más elevados con régimen laminar, pero ante cualquier mínima perturbación (e.g. vibración), el flujo se inestabiliza y entra en una dinámica turbulenta autosostenida, que no desaparece a menos que se vuelva a la situación de número de Re por debajo de 2300. Debe señalarse que este valor de Re crítico es válido sólo para tubos de sección circular. Para otras geometrías la transición a flujo turbulento se dará a Re diferentes. Por otra parte dicho valor debe considerarse como una referencia media, ya que la transición puede ocurrir antes o después, de acuerdo con las condiciones específicas de cada caso (uniformidad del flujo a la entrada, vibraciones, defectos en la cañería, partículas en suspensión, etc).

En la situación de flujo con turbulencia y rugosidad, los torbellinos que se desprenden de la pared consumen energía constantemente, ya que se forman, desprenden y se disipan en la corriente principal, no si antes haber perturbado el flujo a escala global.

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

Observar entonces que en esta situación, el factor de fricción dependerá de ε/D , denominada rugosidad relativa (al diámetro). Esto se verifica para el caso en que el tubo no es liso, donde la escala de los torbellinos estará dominada por el tamaño ε de la rugosidad. Para el caso de pared completamente lisa, la escala de los torbellinos depende de las condiciones del flujo, y para flujos uniformes, sólo será función del número de Re.

Por otra parte, en régimen turbulento el flujo no puede ser estacionario. De todas formas se puede rescatar la idea de flujo estacionario, promediando temporalmente las fluctuaciones rápidas turbulentas. Para esto se debe tomar una media temporal de los campos en lapsos un poco mayores a $T = \varepsilon/V$, siendo ε el tamaño representativo de la rugosidad parietal. Es decir, para rescatar el perfil promedio en el caso turbulento, en cada punto se hacen promedios del tipo:

$$\bar{v} = \frac{1}{\alpha T} \int_0^{\alpha T} v \, dt$$

con α un valor mayor que la unidad. La idea es promediar en lapsos que sean de algunas veces el periodo de las fluctuaciones turbulentas.

Perfil

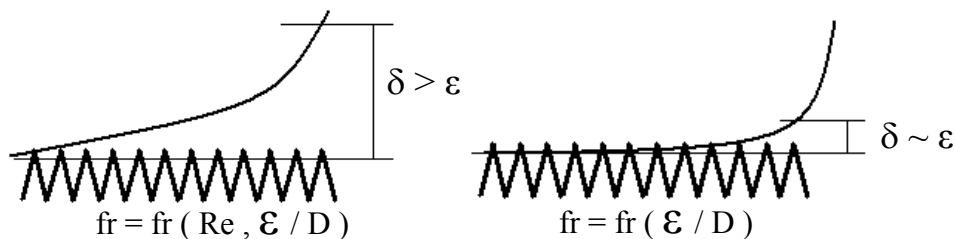


Laminar
Parabólico



Turbulento
Logarítmico

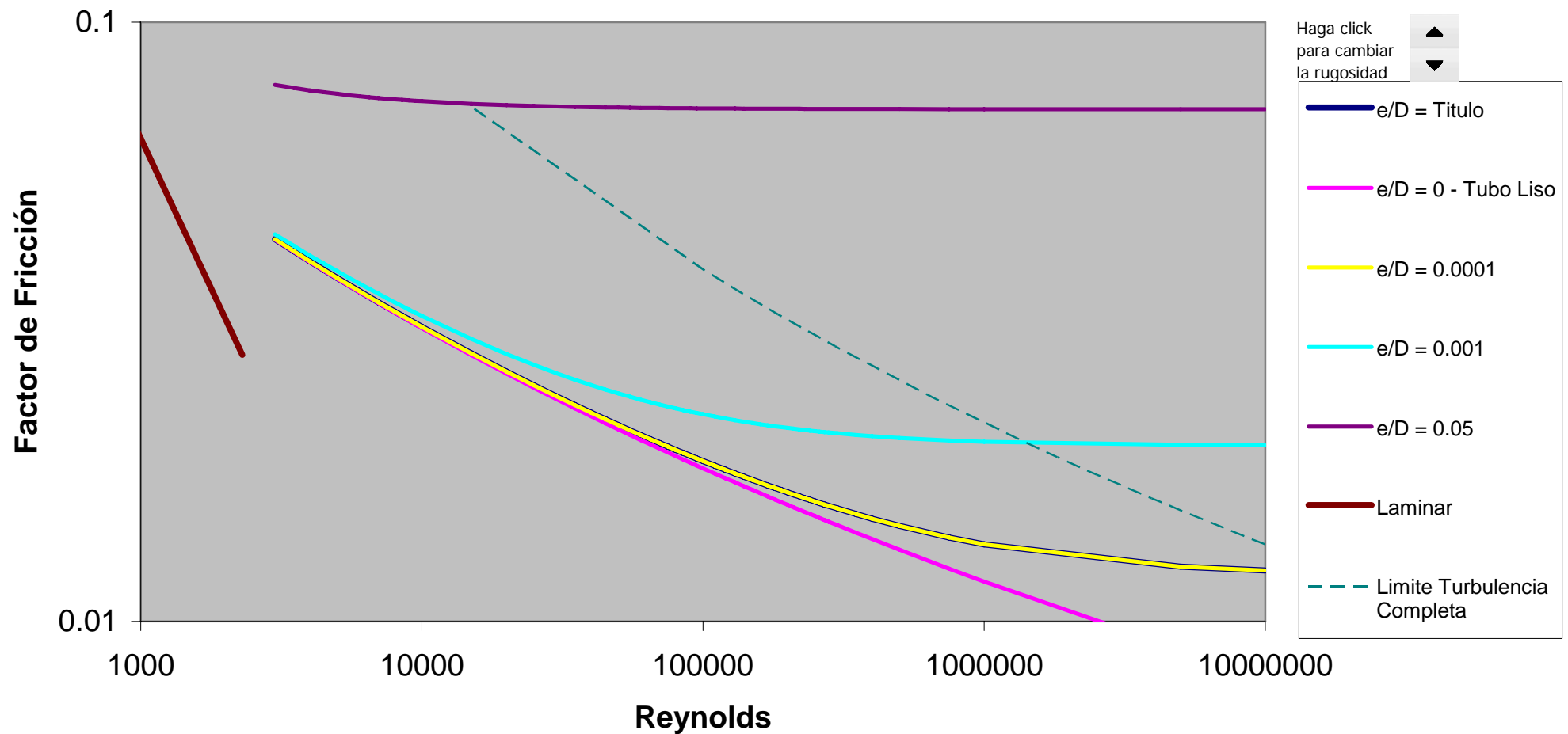
En presencia de rugosidad parietal el factor de fricción deja de depender del Re para valores del mismo suficientemente grandes. Esto debido a que se alcanza la situación en que el espesor de capa límite viscosa sobre la pared se hace menor que la altura de las rugosidades. Además, la fricción viscosa entre capas de fluido debido a los gradientes medios de velocidad, deja de ser significativa frente a la energía atrapada y disipada por los microtorbellinos turbulentos, cuya escala predominante está en proporción a la rugosidad.



De tal manera que las curvas del factor de fricción (a rugosidad constante) se hacen paralelas a las abscisas en un gráfico en función del Re (diagrama de Moody). A continuación se presenta el diagrama de Moody que representa los factores de fricción en función del Re (en el mismo es posible variar la rugosidad interactivamente):

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

Diagrama de Moody, Rugosidad Relativa=0.0001



Para el caso turbulento, el diagrama de Moody ha sido obtenido experimentalmente. Las siguientes fórmulas empíricas se derivan de ajustes de expresiones apropiadas a los datos consignados en dicho diagrama.

Fórmula de Colebrook (implícita)

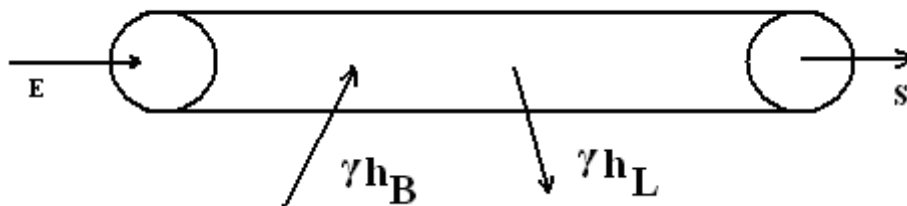
$$f_r = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f_r}} \right) \right]^2}$$

Fórmula de Swamee y Jain (explícita)

$$f_r = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

Los valores de rugosidad se encuentran tabulados en la bibliografía de acuerdo al tipo de material de la pared (acero, cobre, plástico, cemento, etc) u ocasionalmente son proveídos por los fabricantes de las conducciones.

Resumen:



Denotando a la energía mecánica total en unidades de altura como h_T se tiene que:

$$h_T^E + h_B(Q) = h_T^S + h_L(Q)$$

$$h_T = \frac{V^2}{2g} + h + \frac{P}{\gamma}$$

$$h_L = f_r \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f_r \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g A^2}$$

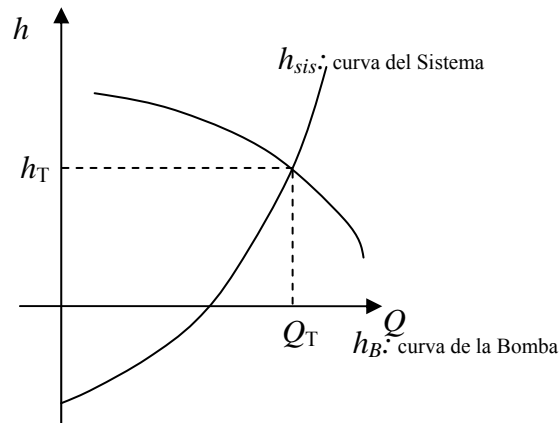
$$\frac{V_E^2}{2g} + h^E + \frac{P^E}{\gamma} + h_B = \frac{V_S^2}{2g} + h^S + \frac{P^S}{\gamma} + h_L$$

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

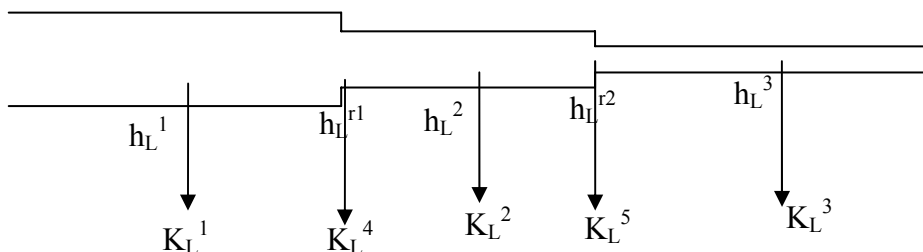
$$\frac{Q^2}{2g A^{E^2}} + h^E + \frac{P^E}{\gamma} + h_B(Q) = \frac{Q^2}{2g A^{S^2}} + h^S + \frac{P^S}{\gamma} + h_L(Q)$$

$$h_B(Q) = h_{sis}(Q)$$

$$h_{sis}(Q) = \left(\frac{Q^2}{2g A^{S^2}} + h^S + \frac{P^S}{\gamma} \right) - \left(\frac{Q^2}{2g A^{E^2}} + h^E + \frac{P^E}{\gamma} \right) + h_L(Q)$$



PÉRDIDAS EN CONDUCCIONES DISPUESTAS EN SERIE



1,2,3 Pérdidas distribuidas a lo largo de los tramos

4,5 Pérdidas concentradas en la singularidad (reducciones)

En sistemas en serie, donde puede existir varios tramos de cañería de distintos diámetros y varios accesorios, las pérdidas totales se sumarán, teniendo en cuenta que en todos los tramos de una serie el caudal es constante. De esta manera conviene utilizar el caudal como variable, ya que será un factor común a toda la serie. Esto, en general, no se cumple para la velocidad si los diámetros varían. De esta manera conviene utilizar para cada tramo, la siguiente expresión de la fórmula de Darcy-Weisbach:

$$h_L = (f_r L/D)/(2g A^2) \cdot Q^2$$

Por conveniencia introducimos el factor K_L de pérdidas de acuerdo a la siguiente expresión:

$$K_L = f_r \cdot L / D$$

El número de Reynolds R_e y la rugosidad relativa cambiarán en cada tramo de acuerdo con el diámetro del ducto. De esta manera, cada tramo tendrá su propio factor de fricción. Es así que si identificamos cada tramo con la letra i , las pérdidas totales quedarán expresadas por

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

$$h_L^T = \sum_i K_L^i / (2g A_i^2) Q^2 = \left(\sum_i K_L^i / 2g A_i^2 \right) Q^2 = \beta Q^2 \quad (3)$$

$$\beta = \sum_i \beta_i \quad ; \quad \beta_i = K_L^i / 2g A_i^2$$

Los accesorios o singularidades de la conducción tales como válvulas, reducciones, expansiones, codos, curvas, derivaciones, entradas, bridas, etc, se representan usualmente por un K_L apropiado que se tabula de acuerdo al accesorio, siendo en general una constante que depende del tipo y tamaño del aditamento. Aunque existen otras variantes para expresar las pérdidas en los accesorios (que pueden depender del número de Reynolds y ciertos coeficientes de forma) lo más usual es encontrar tablas para los diferentes K_L . Otra forma alternativa de tabular las pérdidas en las singularidades es dar una longitud equivalente de cañería y un factor de fricción, que en el caso de omitirse se debe suplantar por el de la propia cañería a la cual el accesorio está conectado. En esta alternativa se supone que las pérdidas en dicho elemento equivalen a adicionar una dada longitud de la cañería a la que está conectado, la cual provocaría pérdidas equivalentes. Con cualquiera de las alternativas mencionadas, la presencia de las singularidades se introduce en la sumatoria anterior a través de los factores K correspondientes. Como cuestión de orden práctico cabe señalar que para todos los aditamentos, excepto las entradas desde un reservorio, el área de referencia es la de corriente arriba.

Por último, es necesario resaltar que las pérdidas que las singularidades provocan en el circuito no ocurren solamente en el lugar físico donde el mismo se encuentra, sino que, debido al des-desarrollo del perfil de velocidades ocurren a lo largo de una cierta distancia corriente abajo del mismo. Es decir, que el K_L del aditamento lleva en cuenta todo el efecto de perturbación que este provoca en la conducción.

PÉRDIDAS EN CONDUCCIONES DISPUESTAS EN PARALELO

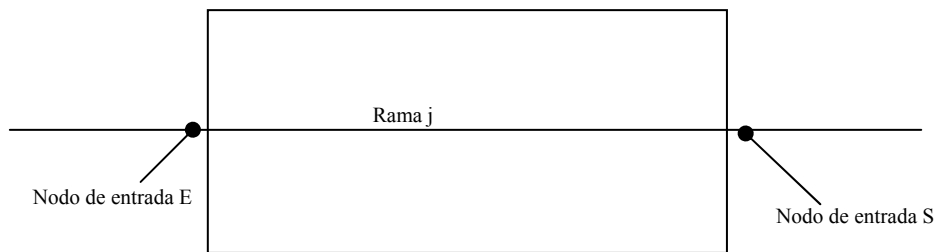
Para la resolución de las pérdidas de carga en tramos dispuestos en paralelo, se asume que en los puntos de concurrencia, inmediatamente antes del nodo de entrada e inmediatamente después de la salida del paralelo, tanto las presiones como las velocidades son uniformes. Esto último requiere la hipótesis que los diferentes flujos concurrentes estén bien mezclados. Con esta hipótesis, de inmediato se sigue que la diferencia de carga (energía mecánica) en cada rama del paralelo serán las mismas, ya que todos los tramos nacen con una altura, presión y velocidad comunes y concurren hacia el nodo de salida donde también poseen una presión, altura y velocidad comunes. Por otra parte, observar que las diferencias de Piezométrica también son comunes a todos los tramos. De esta manera resulta siempre posible calcular la variación de energía cinética entre la entrada y salida de cada ramal y para el circuito global. Estas variaciones son nulas cuando la cañería principal tenga el mismo área tanto en la divergencia como en la concurrencia. Muchas veces esta diferencia de energía cinética se desprecia frente a las pérdidas efectivas aún cuando las áreas no sean iguales, trabajando sólo con las diferencias de Piezométrica en lugar de la energía mecánica total. Lo anterior se sustenta, como dijimos, en que al considerarse un perfil de velocidades uniforme, tanto en la sección de entrada como de salida del circuito principal, o bien las áreas A_j correspondientes al flujo de cada ramal j son iguales en la entrada y la salida (en caso que los ductos de entrada salida sean iguales), o bien se mantienen las mismas proporciones respecto del área total tanto en la entrada como en la salida. Es decir,

$$A_j^E / A^E = A_j^S / A^S ; A^E = \sum_j A_j^E ; A^S = \sum_j A_j^S$$

$$Q_j^E = Q_j^S \Rightarrow V^E A_j^E = V^S A_j^S \Rightarrow (Q^E / A^E) A_j^E = (Q^S / A^S) A_j^S \therefore A_j^E / A^E = A_j^S / A^S = Q_j / Q$$

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

Observar que las A_j se refieren estrictamente a las áreas en que el flujo principal se reparte hacia cada una de las ramas en las secciones de entrada y salida de la tubería principal. Si además $A^E = A^S$ entonces obviamente se tiene para cada ramal: $A_j^E = A_j^S$ y la variación de energía cinética entre entrada y salida de cada rama es estrictamente nula. Como ya dijimos, muchas veces los términos de la izquierda de la ecuación 5 (ver más abajo) asociados a la variación de energía cinética debido a las discrepancias entre A_j^E y A_j^S se desprecian, aunque aquí los hemos conservado en razón de la completitud de la exposición. Además se pretende mostrar que es posible tenerlos en cuenta mediante la hipótesis de flujo bien mezclado, es decir, asumiendo esencialmente perfiles de velocidad uniformes a la entrada y a la salida. Esto conduce al resultado obvio que la variación de energía cinética es igual en cada rama e igual a la global, referida ésta al paralelo considerado como sistema equivalente entre la sección de entrada y la de salida. Con todas las consideraciones anteriores es posible establecer las relaciones de pérdidas de carga en circuitos paralelos.



De esta manera, se tiene que para cada rama j del paralelo se verificará que

$$\begin{aligned}
 h_{Tj}^E - h_{Tj}^S &= h_{Lj} \\
 V_j^{E^2} / 2g + h^E + P^E / \gamma &= V_j^{S^2} / 2g + h^S + P^S / \gamma + h_{Lj} \\
 Q_j^2 / 2g A_j^{E^2} + h^E + P^E / \gamma &= Q_j^2 / 2g A_j^{S^2} + h^S + P^S / \gamma + h_{Lj}
 \end{aligned} \quad (4)$$

Como las velocidades de entrada y salida son iguales por hipótesis para todas las ramas, es posible escribir,

$$V^{E^2} / 2g + h^E + P^E / \gamma = V^{S^2} / 2g + h^S + P^S / \gamma + h_{Lj}$$

Donde se suprimieron los subíndices en las velocidades ya que se refieren a valores del circuito principal.

De acuerdo con 3b, es posible escribir

$$\begin{aligned}
 h_z^E + V^{E^2} / 2g - (h_z^S + V^{S^2} / 2g) &= \beta_j Q_j^2 \\
 h_T^E - h_T^S &= \beta_j Q_j^2 \\
 h_z &= P / \gamma + h \\
 h_T &= P / \gamma + h + V^2 / 2g
 \end{aligned} \quad (5)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \Delta h_T &= \beta_j Q_j^2 \\
 \Delta h_T &= h_T^E - h_T^S
 \end{aligned}$$

Recordar que el salto Δh_T es común a todos los tramos.

Gracias a la colaboración de Clara Calviño, Lucas Aloia, José Minellono, Bruno Ferrante

Tanto el caudal de entrada como de salida serán iguales a la suma de los Q_j de cada rama,

$$Q = \sum_j Q_j .$$

El circuito paralelo tendrá un coeficiente β total equivalente de acuerdo con,

$$\Delta h_T = \beta Q^2$$

Además observar que,

$$Q_j = \sqrt{\Delta h_T} / \sqrt{\beta_j} \quad ; \quad Q = \sqrt{\Delta h_T} / \sqrt{\beta}$$

Haciendo uso de la conservación de caudales resulta,

$$\sqrt{\Delta h_T} / \sqrt{\beta} = \sum_j \sqrt{\Delta h_T} / \sqrt{\beta_j}$$

De la cual se sigue inmediatamente la relación,

$$1 / \sqrt{\beta} = \sum_j 1 / \sqrt{\beta_j}$$

Es así que se obtiene una ley similar a la de suma de resistencias en paralelo para circuitos eléctricos, pero con raíces de los β (análogos a las resistencias R), debido a que los caudales figuran al cuadrado en la que sería la análoga de la ley de Ohm (Q es el análogo a la corriente eléctrica I).

$$\Delta h_T = \beta Q^2$$

$$\Delta V = R I$$

Además se verifica que,

$$Q_j / Q = \sqrt{\frac{\beta}{\beta_j}}$$

$$A_j^E / A^E = A_j^S / A^S = \sqrt{\frac{\beta}{\beta_j}}$$

Por lo tanto usando la ecuación 4b,

$$Q_j^2 \frac{1}{2g A_j^{E^2}} + h_Z^E = Q_j^2 \frac{1}{2g A_j^{S^2}} + h_Z^S + \beta_j Q_j^2$$

$$Q_j^2 \frac{\beta_j}{2g A^{E^2} \beta} + h_Z^E = Q_j^2 \frac{\beta_j}{2g A^{S^2} \beta} + h_Z^S + \beta_j Q_j^2$$

$$h_Z^E - h_Z^S = (1/2g \beta A^{S^2} - 1/2g \beta A^{E^2} + 1) \beta_j Q_j^2$$

$$Q_j = \sqrt{\frac{h_Z^E - h_Z^S}{(1/2g \beta A^{S^2} - 1/2g \beta A^{E^2} + 1) \beta_j}}$$

Hay varias otras maneras alternativas de llegar a este resultado. Por otra parte, lo planteado hasta aquí no tuvo en cuenta la existencia de elementos activos, tales como bombas en alguna de las ramas. Introducir la acción de dichos elementos en algún ramal no es una tarea complicada, dejándose para el lector ya que están dados todos los conceptos necesarios para dicha tarea.